

reiner Elektronenvorgang ohne Bewegung von Molekülfragmenten scheidet deshalb als Mechanismus des Temperungseffektes aus. Eine Rekombination mit beliebigen, auch weiter entfernt liegenden Bruchstücken lässt sich aber ebenfalls ausschließen, da dann mit Erhöhung der absorbierten Strahlendosis und einer damit verbundenen Erhöhung der Konzentration an Zersetzungprodukten im Kristall eine Zunahme des Temperungseffektes hätte erwartet werden dürfen. In der Tat ist aber die thermische Teilretention im untersuchten Bereich konstant und unabhängig von der Strahlungsdosis. Das deutet darauf hin, daß sich der Temperungseffekt nur in einer begrenzten Zone um den Entstehungsort der Fragmente abspielt. Aus Konstitutionsgründen kommen für die Rekombination nur Benzolstrukturen in Frage, denn es ist nicht damit zu rechnen, daß sich Di-benzol-chrom(0) aus Bruchstücken des Benzolringes zurückbildet. Das ungeladene und besonders strahlenstabile Benzolmolekül dürfte in erster Linie als Rekombinationspartner zu diskutieren sein. Wenn man aber die Kristalle in einem Überschuß des „Molekülfragments“ Benzol auflöst, erreicht man keine Steigerung der Retention, obwohl retentionsfähige  $^{51}\text{Cr}$ -Komponenten vorhan-

den sind. Der Temperungsmechanismus scheint demnach eine Reaktion zu sein, die von einem aktivierten Zustand der Partner ausgeht, wenn nicht von vornherein schon eine Wechselbeziehung zwischen den Reaktionspartnern besteht<sup>11</sup>, worauf besonders auch die lokale Begrenzung des Temperungseffektes hinweist. Man kann diesen zur Molekülbildung fähigen Zustand auch als eine „eingefrorene, chemische Reaktion“ bezeichnen<sup>12</sup>. Es würde dann der „aktivierte Komplex“ im thermischen Störbereich des Kristallgitters „konserviert“ sein und sich je nach den äußeren Bedingungen zu getrennten Molekülfragmenten oder zu einem stabilen Molekül weiterentwickeln. Mit dieser Deutung ließe sich das Verhalten des bestrahlten Di-benzol-chrom(0) ohne Widersprüche verstehen.

Wir danken Herrn Prof. Dr. H. J. BORN für seine freundliche Förderung, wodurch diese Untersuchungen erst ermöglicht wurden. Ebenso danken wir Herrn Prof. Dr. E. O. FISCHER für seine Unterstützung und seine zahlreichen Ratschläge. Auch Herrn J. GORTER sei für seine tatkräftige Mithilfe gedankt. Außerdem danken wir der Betriebsgruppe des FRM für die ausgeführten Bestrahlungen. Dem Bundesministerium für Atomkernenergie und Wasserwirtschaft sind wir für großzügige Gewährung von Personal- und Sachmitteln verpflichtet.

<sup>9</sup> S. DANTON, G. S. LAURENCE, W. SCHNEIDER, D. R. STRANKS u. M. S. VAIDYA, Int. Conf. Radioisot. Sci. Res., Paris 1957, Bericht Nr. 211.

<sup>10</sup> S. KATZ, J. WEIHER u. A. F. VOIGT, US AEC-Report ISC-1096 (1958).

<sup>11</sup> Vgl. G. HARBOTTLE u. N. SUTIN, Zusammenfassg. loc. cit. <sup>3</sup>.

<sup>12</sup> G. HARBOTTLE u. N. SUTIN, J. Chem. Phys. **62**, 1344 [1958].

## Zur Kleinwinkeltheorie der Vielfachstreuung

Von HANS FLEISCHMANN

Aus dem Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München  
(Z. Naturforsch. **15 a**, 1090—1096 [1960]; eingegangen am 8. September 1960)

Die vorliegende Arbeit gibt zuerst eine Untersuchung der von MOLIÈRE bei der Ableitung seines Einzelstreuquerschnittes gemachten Näherungen, aus der aber im wesentlichen nur eine relativistische Korrektur der Vielfachstreuung folgt. Eine Formel hierfür wird angegeben. Die Diskrepanz mit den Ergebnissen von HANSON und Mitarb. bei Beryllium wird auf Einflüsse der chemischen Bindung zurückgeführt. Für kleine Schichtdicken (Stoßzahl  $\Omega \lesssim 100$ ) ergeben sich weiterhin aus der Abweichung der von MOLIÈRE seiner Theorie zugrunde gelegten Abschirmfunktion  $q(\chi)$  von der berechneten Änderungen in der Gesamtstreuverteilung, die sich für  $10 \lesssim \Omega \lesssim 100$  in erster Näherung durch eine Vergrößerung des MOLIÈRENSchen Parameters  $B$  erfassen lassen. Diese hängt von der Steilheit von  $q(\chi)$  in der Umgebung des Abschirmwinkels  $\chi_a$  ab. Für den Fall großer Werte des Entwicklungsparameters  $\alpha = z Z / 137 \beta$  wird eine Abschätzung dieser Vergrößerung von  $B$  gegeben. Im Mehrfach- und Einzelstreugebiet liefert die so korrigierte MOLIÈRE-Verteilung allerdings etwas zu große Streuintensitäten.

Nach einigen Versuchen anderer hat zuerst MOLIÈRE<sup>1</sup> eine brauchbare Kleinwinkelnäherung für die Theorie der Vielfachstreuung geladener

Teilchen gegeben, deren Ergebnisse später von BETHE<sup>2</sup> in einer besser durchsichtigen Weise abgeleitet wurden. Nach Berücksichtigung der inelasti-

<sup>1</sup> G. MOLIÈRE, Z. Naturforschg. **2 a**, 133 [1947] und **3 a**, 78 [1948]. — Gleichungen daraus im folgenden zitiert mit (Mo I ..) und (Mo II ..).

<sup>2</sup> H. A. BETHE, Phys. Rev. **89**, 1256 [1953]; Gln. daraus im folgenden zitiert mit (B ..).



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

schén Stöße durch FANO<sup>3</sup> ist sie heute im wesentlichen allgemein anerkannt. Sie beruht neben einigen kleineren Vernachlässigungen vor allem auf zwei Grundlagen:

1. Der Ableitung des differentiellen Einzelstreuquerschnitts eines Atoms aus dem FERMI-Potential<sup>1</sup>, die in neuerer Zeit von NIGAM, SUNDARESON und WU<sup>4</sup> einer Kritik unterzogen wurden.

2. Der in Anm.<sup>2</sup> abgeleiteten Tatsache, daß die Gesamtstreuverteilung bei nicht zu kleinen Foliedicken nur von dem durch (B 16)<sup>2</sup> definierten Abschirmwinkel  $\chi_a$  (s. Anm.<sup>5</sup>), nicht aber von der genauen Form des Streuquerschnitts bei sehr kleinen Winkeln abhängt.

Ziel dieser Arbeit ist nun eine Untersuchung dieser beiden Ausgangspunkte.

## 1. Einzelstreuverteilung

In der genannten Arbeit bemängeln NIGAM und Mitarbb. an der MOLIÈRESchen Arbeit die Verwendung der BORNschen Streuphasen (Mo I, 2.2) in den expliziten Berechnungen des Streuintegrals (Mo I, 3.10). Nach ihrer Gl. (68) soll eine Berücksichtigung der höheren BORNschen Näherungen neben höheren Potenzen in  $\alpha$  in der Streuformel auch ein Glied von der Ordnung  $\alpha$  ergeben. Nun weicht aber, wie man auf den von N.S.W.<sup>4</sup> angegebenen Formeln leicht ausrechnet, bei einem Potential der Form  $V(r) = A \exp(-\sigma r)/r$  der von ihnen verwendete DALITZsche Streuquerschnitt<sup>6</sup>, der gerade eine zweite BORNsche Näherung darstellt, für  $\chi < \chi_0$  nur um Glieder von der Größenordnung  $\alpha \chi_0$  von der ersten BORNschen Näherung ab; für  $\chi > \chi_0$  ergibt sich die Darstellung<sup>(4), S. 497</sup>:

$$q_D(\chi) = q_{\text{Born}} \{ 1 - \beta^2 \sin^2(\chi/2) + \pi \alpha \beta^2 [\sin(\chi/2) - \sin^2(\chi/2)] + 2 \alpha \chi_0 (1 - \beta^2) \}, \quad (1)$$

d. h. auch hier unterscheiden sich die beiden Querschnitte im nicht-relativistischen Bereich nur um Glieder von der Größenordnung  $\alpha \chi_0$ , die im allgemeinen kleiner als  $10^{-2}$  sind und daher von MOLIÈRE vernachlässigt wurden. Da die beim Übergang von (Mo I, 4.4) auf (Mo I, 4.4') vernachlässigt

Glieder auch nur von der Größenordnung  $\alpha \chi_0$  sind, so bedeutet dies eigentlich gerade eine Bestätigung der MOLIÈRESchen Vermutung, daß die nach der WKB-Methode berechneten Phasenschiebungen im wesentlichen exakt sind.

Die in der weiteren Rechnung von MOLIÈRE gemachten Näherungen – im wesentlichen seine Entwicklung (Mo I, 7.2') und der Ersatz

$$\exp\{i \alpha \varphi(y)\} = y^{-2i\alpha} \cdot \{1 + i \alpha y^2 (-0.81 - 2.21 \ln y)\} \quad (2)$$

– sind im allgemeinen sehr gut. Nur für  $\alpha \geq 5$  und  $(\alpha \chi/\chi_0) > 5 \cdot 10^{-2}$  wird der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck für die Umgebung des von MOLIÈRE genannten Sattelpunktes, d. h. für die nennenswert zum Streuquerschnitt beitragenden Werte von  $y$ , schon stark verschieden von 1 und daher die obige Näherung etwas grob. Der hierdurch entstehende Fehler beträgt jedoch höchstens wenige Prozent. [Wie auch die Diskrepanz mit den aus (Mo I, 8.7) und (Mo I, 8.4) berechneten Werten zeigt, ergibt sich ein etwas flacherer Verlauf der Abschirmfunktion als von MOLIÈRE gezeichnet.] Insgesamt dürfte also der von MOLIÈRE berechnete Streuquerschnitt besonders bei schweren Kernen, bei denen das FERMI-Potential eine gute Näherung darstellt, für  $\beta \ll 1$  nur um wenige Prozent falsch sein.

Anders ist es im relativistischen Bereich. Hier lassen sich nur für  $\chi < \chi_0$  die Korrekturen vernachlässigen, für  $\chi > \chi_0$  dagegen ergeben sich nach Gl. (1) einige Zusatzglieder. Von diesen ist für die Vielfachstreuung praktisch nur das Glied  $[\pi \beta_2 \alpha \sin(\chi/2)]$  von Bedeutung, das zu dem Glied  $(\pi \alpha \beta^2 \chi_0 B^{1/2} u)$  in (N.S.W. 63) führt. Speziell für den von ihnen aufgegriffenen Fall der Goldfolie haben N.S.W. die daraus für  $f_0$  entstehende Korrektur berechnet und als  $f_1'$  in ihrer Tab. II angegeben. Für die allgemeine Berechnung der relativistischen Korrektur ist folgende Darstellung, die man durch Abspaltung des Faktors  $\varrho = \pi \alpha \beta^2 \chi_0 B^{1/2}$  aus  $f_1'$  und  $f_2'$  erhält, etwas günstiger:

$$f(\vartheta) \vartheta d\vartheta = \frac{\vartheta d\vartheta}{\vartheta_0^2} \{ f_0(\vartheta/\vartheta_0) + B^{-1} [f_1(\vartheta/\vartheta_0) + \varrho g_1(\vartheta/\vartheta_0)] + B^{-2} [f_2(\vartheta/\vartheta_0) + \varrho g_2(\vartheta/\vartheta_0)] \}, \quad (3)$$

<sup>3</sup> U. FANO, Phys. Rev. **93**, 117 [1954].

<sup>4</sup> B. NIGAM, M. SUNDARESON u. T. WU, Phys. Rev. **115**, 491 [1959].

<sup>5</sup> Wo nichts anderes angegeben ist, werden die von MOLIÈRE und BETHE eingeführten Bezeichnungen benutzt; insbes. bedeuten  $\chi$  Einzelstrewinkel,  $\vartheta$  Gesamtstrewinkel.

<sup>6</sup> R. H. DALITZ, Proc. Roy. Soc., Lond. A **206**, 509 [1951].

wobei neben den schon von MOLIÈRE verwendeten Bezeichnungen

$$g_1 = - \int_0^\infty \exp(-u^2/4) u^2 J_0(u \vartheta/\vartheta_0) du \\ = -4 \int_0^\infty \exp(-\xi) \xi^{1/2} J_0(2 \xi^{1/2} \vartheta/\vartheta_0) d\xi, \quad (4)$$

$$g_2 = -4 \int_0^\infty \exp(-\xi) \xi^{3/2} \ln \xi J_0(2 \xi^{1/2} \vartheta/\vartheta_0) d\xi$$

bedeuten. Die aus den N.S.W.-Werten für  $f_1'$  folgenden Werte für  $g_1$  sind in Tab. 1 eingetragen.

$\vartheta/\vartheta_0$	$g_1$	$\vartheta/\vartheta_0$	$g_1$
0	-3,55	1,4	+0,29
0,2	-2,90	1,6	+0,70
0,4	-2,18	1,8	+1,14
0,6	-1,58	2,0	+0,23
0,8	-1,04	3,0	+0,054
1,0	-0,55	4,0	+0,020
1,2	-0,12		

Tab. 1. Funktion  $g_1$  für die relativistische Korrektur der MOLIÈRE-Verteilung.

Für  $\vartheta/\vartheta_0 \lesssim 2$  gibt dieses allein sehr gut die relativistischen Korrekturen für die Vielfachstreuung wieder. Bei größeren Winkeln dürfte jedoch die in  $g_2$  berücksichtigte Störung von  $f_1$  eine wesentliche Verkleinerung der Korrektur liefern<sup>7</sup>, wogegen die höheren Korrekturen für  $f_0$ ,  $f_1$  usw. bei einer Gesamtgenauigkeit von etwa 1–2% außer in sehr ungünstigen Fällen zu vernachlässigen sein dürften.

#### Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen

Für die von HANSON und Mitarb.<sup>8</sup> verwendeten Goldfolien ergibt die Korrektur eine Vergrößerung des theoretischen Wertes für die  $(1/e)$ -Breite auf ca.  $3,88^\circ$  bzw.  $2,56^\circ$  gegenüber den gemessenen Werten von  $3,78^\circ$  bzw.  $2,56^\circ$ . Die gemessenen  $(1/e)$ -Werte sind zwar wegen der Vernachlässigung der Korrektur für die endliche Strahldivergenz eher etwas zu groß; da jedoch die Meßgenauigkeit bestens 2–3% betragen dürfte, erscheint der Unterschied auch jetzt noch nicht sehr wesentlich.

<sup>7</sup> Eine genaue Berechnung von  $g_2$  soll demnächst mit der Rechenmaschine ausgeführt werden; inwieweit dann noch die von NIGAM und Mitarb. konstatierte Übereinstimmung mit den experimentellen Streuintensitäten von HANSON und Mitarb. erhalten bleibt, ist abzuwarten.

<sup>8</sup> A. O. HANSON, L. H. LANZI, E. M. LYMAN u. M. B. SCOTT, Phys. Rev. **84**, 634 [1951].

<sup>9</sup> D. R. HARTREE u. W. HARTREE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **149**, 210 [1935].

Bei Beryllium ist die relativistische Korrektur bedeutungslos. Zur Untersuchung der hier bestehenden Differenzen wurde eine Berechnung des Abschirmwinkels auf Grund des HARTREE–FOCK-Potentials<sup>9, 10</sup> durchgeführt. Dazu wurde die in Anm.<sup>9</sup> ohne Austausch berechnete Potential-Funktion  $Z_p/r$  gemäß der sich durch den Austausch ergebenden Verkleinerung der (2s)-Schale modifiziert und durch die Entwicklung

$$Z_p(r)/r = (4/r) \{ \exp(-2.45 \varrho) + 1.43 \varrho^2 \\ \cdot \exp(-2.00 \varrho) + 10^{-3} \varrho^4 \exp(-\varrho) \} \quad (5)$$

mit  $\varrho = r/r_0$ ,  $r_0 = 0.529 \text{ \AA}$  für  $0 \leq \varrho \leq 4$

mit einer Genauigkeit von besser als 1% dargestellt.

Die bei der Berechnung der BORNschen Näherung nach (Mo I, 2.2) und (Mo I, 2.3) auftretenden Integrale lassen sich geschlossen integrieren<sup>11</sup>. Einzelheiten und eine Darstellung des sich ergebenden  $q(\chi)$  finden sich im Anhang.

Eine anschließende graphische Integration von  $q(\chi)$  liefert für den durch (B 16) definierten Abschirmwinkel

$$(\chi_a)_{\text{HF}} = (1.13 \pm 0.01) \chi_0 \quad (6)$$

mit  $\chi_0 = 1/a k_0 = (Z^{1/3}/0.488) (1/r_0 k_0)$ .

Ein Vergleich mit dem aus dem FERMI-Potential sich ergebenden Wert

$$(\chi_a)_{\text{F}} = \sqrt{1.13} \chi_0 = 1.06 \chi_0$$

zeigt im Gegensatz<sup>12</sup> zu dem Ergebnis von N.S.W. eine überraschend gute Übereinstimmung, wogegen der Verlauf von  $q(\chi)$  schon relativ stark abweicht. Die Erklärung der bei HANSON und Mitarb. auftretenden Diskrepanzen ist also mehr in den durch die Bindung bewirkten Elektronenverschiebungen als in einer Nichtanwendbarkeit des statistischen Modells zu suchen. Da in metallischem Beryllium das mittlere einem Atom zur Verfügung stehende Volumen nur  $(1.24)^3 4 \pi/3 \text{ \AA}^3$  beträgt, die Elektronendichte beim freien Atom jedoch zwischen  $0.8$ – $1.5 \text{ \AA}^{-3}$  sehr hoch ist, so ergibt sich im Kristall eine starke

<sup>10</sup> D. R. HARTREE u. W. HARTREE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **150**, 9 [1935].

<sup>11</sup> H. BATEMAN, A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER u. F. G. TRICOMI, Integral Transforms, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1954.

<sup>12</sup> Die Ergebnisse von FOCK u. M. PETRASHEN (Phys. Z. Sowjetunion V. 8, 359) waren mir leider nicht zugänglich.

Deformation des Potentials, die durch die Überlagerung der Potentiale benachbarter Atome noch erhöht wird. Eine numerische Abschätzung dieses Effektes führt zu  $\chi_a/\chi_0 = 1,6$ , was wegen der Unempfindlichkeit der Vielfachstreuverteilung gegenüber Änderungen in  $\chi_a$  schon recht gut mit den aus den Experimenten folgenden Werten von  $\chi_a/\chi_0 = 1.8$  bzw. 1,6 übereinstimmt. Eine Korrektur, wie sie N.S.W. einführen, erscheint demnach überflüssig.

## 2. Einfluß des Verlaufes der Abschirmfunktion auf die Vielfachstreuverteilung

Wegen der weitgehenden Unabhängigkeit des Ergebnisses von dem genauen Verlauf der Abschirmfunktion  $q(\chi)$  hat MOLIÈRE seiner Theorie der Vielfachstreuung diese in der Form

$$q_1(\chi) = \chi^4 / (\chi^2 + \chi_a^2)^2 \quad (7)$$

zugrunde gelegt, die aber speziell bei großem  $\alpha$  schon ziemlich stark von der berechneten Abschirmfunktion  $q_0(\chi)$  abweicht [vgl. Abb. 1;  $\chi_a$  ist der aus  $q_0(\chi)$  folgende Abschirmwinkel]. Als Gültigkeitsgebiet für seine Theorie gibt MOLIÈRE bei einer Genauigkeit von ca. 1% eine mittlere Stoßzahl  $\Omega \geq 20$  an. Ein Rückschluß von einer gemessenen Streuverteilung auf das Einzelstreuugesetz sollte also erst bei  $\Omega < 20$  möglich sein.

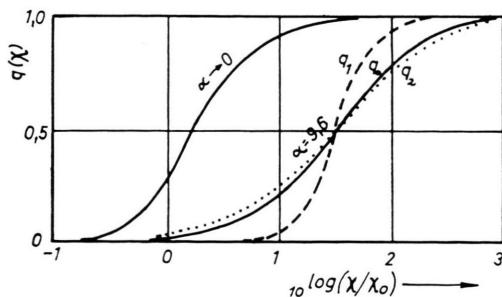


Abb. 1. Vergleich der Abschirmfunktionen. —  $q_0(\chi)$  berechnet von MOLIÈRE für  $\alpha=0$  und  $\alpha=9.6$ ; - - -  $q_1(\chi)$  von MOLIÈRE seiner Theorie zugrunde gelegt ( $\alpha=9.6$ ); ·····  $q_2(\chi)$  nach Gl. (8), ( $\alpha=9.6$ ).

Diese Angaben beruhen letztlich auf einer Abschätzung der Auswirkung der von ihm vernachlässigten höheren Glieder in (Mo II, 5.3) und des Beitrags der  $f_\nu$  mit  $\nu > 2$ . Um daher den Einfluß des Verlaufes von  $q(\chi)$  genauer zu studieren und zugleich eine auch bei kleinerem  $\alpha$  gültige Streuformel zu erhalten, hat man zuerst die höheren Glieder in

(Mo II, 5.3) zu bestimmen. Da dies für die berechnete Abschirmfunktion  $q_0(\chi)$  einen großen numerischen Aufwand erfordert hätte, so wurde statt dessen die Integration von (B, 11) mit der bezüglich  $\chi_a$  äquivalenten und gerade bei großem  $\alpha$  recht gut angepaßten Abschirmfunktion (vgl. Abb. 1).

$$q_2(\chi) = \chi / (\chi + \chi_1) \quad \text{mit} \quad \chi_1 = \chi_a e^{1/2} \quad (8)$$

durchgeführt. Die sich hierbei ergebende Integraltransformation

$$I(\eta) = -2 \chi_c^2 \int_0^\infty \frac{d\chi}{\chi^2(\chi + \chi_1)} \{1 - J_0(\eta \chi)\}$$

ist nach Partialbruchzerlegung geschlossen ausführbar<sup>11</sup> und ergibt

$$I(\eta) = -\frac{2 \chi_c^2}{\chi_1^2} \left\{ \chi_1 \eta - \ln(\gamma \chi_1 \eta / 2) + \frac{\pi}{2} [Y_0(\chi_1 \eta) - H_0(\chi_1 \eta)] \right\}, \quad (9)$$

wobei  $Y_0$  und  $H_0$  die BESSEL-Funktion 2. Art bzw. die STRUVESche Funktion beide 0-ter Ordnung bedeuten ( $\gamma = e^C = 1,781$ ). Wegen der Entwicklungen<sup>13</sup>

$$\frac{\pi}{2} H_0(x) = x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{225} - + \dots,$$

$$\frac{\pi}{2} Y_0(x) = \ln(\gamma x / 2) J_0(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{128} x^4 + - \dots,$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - + \dots \quad (10)$$

ergibt sich daraus mit  $y = (\chi_c \eta)$  und  $\Omega = (\chi_c / \chi_a)^2$

$$\begin{aligned} I(y/\chi_c) &= \Omega(y) - \Omega \\ &= (y/2)^2 \ln[(\gamma y/2)^2 / \Omega e] \\ &\quad - (y/2)^4 \ln[(\gamma y/2)^2 / e^2 \Omega] / 2 \Omega \\ &\quad - 16 e^{1/2} (y/2)^3 / 9 \Omega^{1/2} \\ &\quad + (64 e^{3/2} / 225 \Omega^{3/2}) (y/2)^5 - + \dots . \end{aligned} \quad (11)$$

Hierbei entsprechen die ersten beiden Glieder den von MOLIÈRE in (Mo II, 5.3) angegebenen; die beiden anderen dagegen sind neu. Wie eine Untersuchung der von BETHE gemachten Näherungen ergibt, folgen diese Glieder im wesentlichen aus den bei der Bildung seines Integrales  $I_1$  und beim Einsetzen des Limeswertes von (Mo II, 16) in (Mo II, 17) gemachten Näherungen, die stark von der Stetigkeit

<sup>13</sup> H. BATEMAN, A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER u. F. G. TRICOMI, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York 1953.

der Abschirmfunktion im Übergangsgebiet  $\chi \approx \chi_0$  und von  $\Omega$  abhängen. [Die beiden anderen in (B, 14) und (B, 15) gemachten Näherungen sind dagegen wesentlich besser.]

Bei der Berechnung der Vielfachstreuverteilung erhält man nun bei der MOLIÈRESchen Darstellung der  $f_r$  in (B, 26) unter dem Integral noch ein Glied  $\exp\{-S(\xi)\}$ :

$$\begin{aligned} f_r \rightarrow f_r^* &= \frac{1}{\nu!} \int_0^\infty u J_0(u \vartheta/\vartheta_0) \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \left(\frac{u^2}{4} \ln \frac{u^2}{4}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left[-S\left(\frac{u^2}{4}\right)\right] du \quad (12) \\ &= \frac{2}{\nu!} \int_0^\infty J_0(2 \xi^{1/2} \vartheta/\vartheta_0) \exp(-\xi) / (\xi \ln \xi)^\nu \\ &\quad \cdot \exp[-S(\xi)] d\xi \end{aligned}$$

( $u = B^{1/2} y$ ), wobei  $S(y)$  die höheren Glieder in Gl. (5) darstellt. In dem für die Berechnung von  $f_0 \dots f_4$  interessierenden Bereich von  $\xi$  (vgl. Abb. 2) ist jedoch nur das 3. Glied in Gl. (5) von Bedeutung, so daß

$$S(\xi) = \frac{16}{9} \frac{e^{1/2}}{B^{1/2} \Omega^{1/2}} \xi^{3/2} \quad (13)$$

wird. Leider ist nun  $S$  im allgemeinen schon so groß, daß eine Entwicklung von  $\exp(-S)$  ausscheidet. Eine vernünftige Abschätzung des Gesamteinflusses dürfte man jedoch erhalten aus der bei der Berück-

sichtigung von  $S$  entstehenden prozentualen Verschiebung  $\Delta y_0$  des Maximums von  $y \exp\{\Omega(y) - \Omega\}$ . Obwohl dieses Maximum der in  $f(\vartheta/\vartheta_0)$  vertretenen „BESSEL-Frequenzen“ ( $y/\chi_c$ ) ziemlich breit ausgebildet ist, dürfte sich die durch  $S$  hervorgerufene Veränderung der Streuverteilung in erster Näherung doch recht gut erfassen lassen durch eine entsprechende Maßstabänderung für  $\vartheta$ , bei der aber für  $\vartheta \gg \vartheta_0$ , d. h. im Einzelstreuegebiet, keine Änderungen eintreten sollen. Dies ist möglich durch eine Änderung von  $B$ , so daß

$$(\Delta \vartheta_0/\vartheta_0) = (1/2) (\Delta B/B) = (-\Delta y_0/y_0). \quad (14)$$

Die gestrichelte Kurve in Abb. 3 zeigt die auf diesem Weg berechneten Korrekturen  $\Delta B$  für  $B$ . Wegen der Vernachlässigung der  $f_\nu$  mit  $\nu > 2$  in der von MOLIÈRE gegebenen Entwicklung, die besonders stark geschwächt werden (vgl. Abb. 2), ist die hier notwendige Vergrößerung von  $\vartheta_0$  und damit  $B$  etwas geringer. Eine numerische Rechnung führt zu der ausgezogenen Kurve in Abb. 3, die für die zu grunde gelegte Abschirmfunktion  $q_2(\chi)$  auf etwa 10% genau sein dürfte. Für die von MOLIÈRE berechnete Abschirmfunktion  $q_0(\chi)$  dürften die angegebenen Werte eher etwas zu hoch sein.

Die so korrigierte MOLIÈRESche Streuverteilung stellt, wie schon gesagt, nur eine erste Näherung der real zu erwartenden Verteilung dar. Eine genauere Aussage über sie läßt sich erhalten, wenn man be-

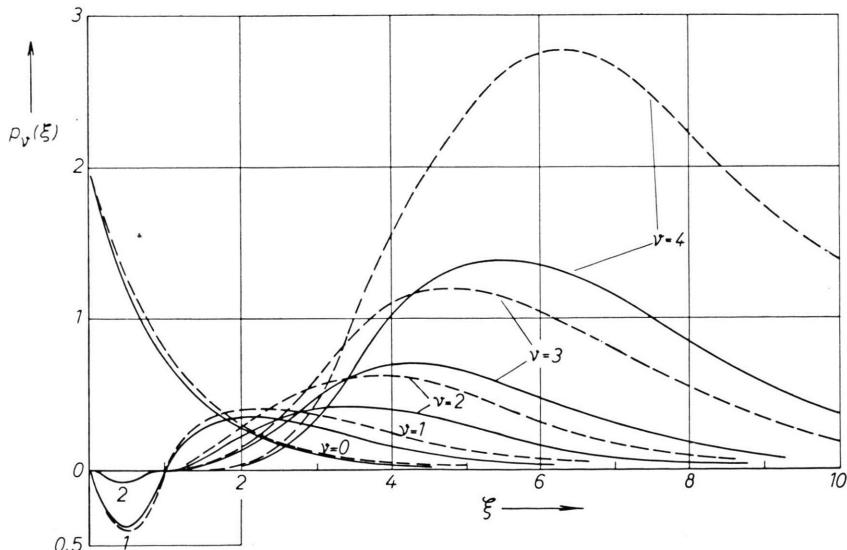


Abb. 2. Funktionen  $p_\nu(\xi) = (2/\nu!) (\xi \ln \xi)^\nu \exp(-\xi) \exp(-S)$ . — —  $S=0$ ; —  $S = (16 e^{1/2}/9 B^{3/2} \Omega^{1/2}) \xi^{3/2} = 0,051 \xi^{3/2}$  (für  $\Omega=25$ ).

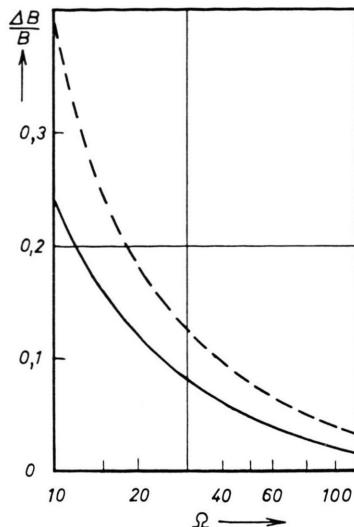


Abb. 3. Scheinbare relative Vergrößerung von  $B$  bei kleinen Schichtdicken.

rücksichtigt, daß bei der Verformung der Abschirmfunktion das mittlere Streuquadrat der Einzelstreuung, das  $\chi_a$  bestimmt, konstant bleiben soll. Damit muß aber, da man ja in der Kleinwinkelnäherung rechnet, das mittlere Streuquadrat hinter der Streufolie unabhängig von der Form der Abschirmfunktion sein. Dieses würde aber bei einer Vergrößerung von  $B$ , die ja einer Verkleinerung von  $\chi_a$  entspricht, erhöht werden. Eine Erklärung dieses Widerspruchs zu dem obigen Ergebnis folgt aus der Tatsache, daß bei den geringen in Frage stehenden Schichtdicken die Abschirmfunktion  $q(\chi)$  für Einzelstreuungen um  $\chi \gtrsim 2 \vartheta_0$  (Mehrfach- und Einzelstreugebiet der Vielfachstreuverteilung) schon um einige Prozent kleiner als 1 ist. Auf Grund des großen Winkels und Raumwinkels ergibt sich hierdurch trotz der  $(1/\chi^4)$ -Abhängigkeit der RUTHERFORD-Streuung eine merkliche Verkleinerung des mittleren Streuquadrates, die durch eine entsprechende Erhöhung des Wirkungsquerschnitts bei den zum Vielfachstreuanteil beitragenden Einzelstreuwinkeln ausgeglichen wird. Daraus ergibt sich eine Verbreiterung dieses Teils der Vielfachstreuverteilung, die durch die oben vorgeschlagene Vergrößerung von  $B$  erfaßt wird<sup>14</sup>. Für  $\vartheta/\vartheta_0 \gtrsim 2$  hat man dagegen Intensitäten zu erwarten, die unter den aus der korrigierten MOLIÈRE-Verteilung folgenden Werten liegen. Bei größeren  $\vartheta$  sollte sie sogar kleiner sein, als aus der nichtkorrigierten MOLIÈRE-Verteilung folgt. Da jedoch bei diesen Winkeln auf Grund der kleinen Intensitäten die Meßwerte meist recht ungenau sind, wird im allgemeinen nur die Verbreiterung des eigentlichen Vielfachstreuanteils in Erscheinung treten; insbesondere natürlich auch bei einer Bestimmung der  $(1/e)$ -Breiten oder Mittelpunktsintensitäten, wie sie häufig ausgeführt wird.

Wegen eines Vergleichs mit den experimentellen Ergebnissen sei auf die folgende Arbeit<sup>15</sup> verwiesen.

Herrn Professor MAIER-LEIBNITZ bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und das bei ihrer Ausführung gezeigte Interesse zu Dank verpflichtet.

## Anhang

### Berechnung des Bornschen Einzelquerschnitts bei Beryllium

In BORNScher Näherung wird (Mo II, 4.6') wegen (Mo II, 6.2) zu

$$q(\chi) = \frac{\sigma(\chi)}{\sigma_{\text{Ruth}}(\chi)} = (\chi/\chi_0)^4 \left[ \frac{1}{2} \int_0^\infty y \, dy J_0(\chi y/\chi_0) \varphi(y) \right]^2 = (\chi/\chi_0)^4 |P|^2 \quad (\text{A } 1)$$

mit  $\chi_0 = (r_0 k_0)^{-1}$  und der Streuphase

$$\varphi(y) = 2(1/Z) \int_0^\infty \frac{Z_p(r/r_0) \, d(r/r_0)}{[(r/r_0)^2 - y^2]^{1/2}}. \quad (\text{A } 2)$$

Zerlegt man nun  $Z_p$  in der Form:

$$Z_p = Z \sum \varrho_\nu(r/r_0)^\nu \cdot \exp(-\beta_\nu r) = \sum \varrho_\nu Z_\nu, \quad (\text{A } 3)$$

so erhält man als Anteil von  $Z_\nu(r/r_0)$  zur Streuphase nach (Mo I, 2.2)

$$(1/2) \varphi_\nu(y) = y^\nu \left( \frac{d}{d\sigma_\nu} \right)^\nu \int_1^\infty \frac{\exp(-\sigma_\nu x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \text{ mit } \sigma_\nu = \beta_\nu y$$

und daraus nach Anm.<sup>11</sup> (S. 138) und Anm.<sup>12</sup> (II, S. 79) in symbolischer Schreibweise

$$(1/2) \varphi_\nu(y) = \left( \frac{d}{d\sigma_\nu} \right)^\nu K_0(\sigma_\nu) = 2^{-\nu} \left\{ K + \frac{1}{K} \right\}^\nu \text{ mit } K^\mu = K^{-\mu} = K_\mu(\beta_\nu y), \quad (\text{A } 4)$$

<sup>14</sup> Eine numerische Berechnung der praktisch nur vom Vielfachstreuanteil abhängigen Mittelintensität stimmt sehr gut mit der nach Abb. 3 zu erwartenden Verbreiterung dieses Anteils überein.

<sup>15</sup> H. FLEISCHMANN, Z. Naturforschg. **15 a**, 1096 [1960], nachstehende Arbeit.

wobei  $K_\mu$  die modifizierte BESSEL-Funktion 3. Art der Ordnung  $\mu$  darstellt. Als Beitrag zur Streuamplitude folgt daraus (wieder in symbolischer Schreibweise):

$$P_r = 2^{-r} \int_0^\infty y^{r+1} J_0(y \chi/\chi_0) \left\{ K(\beta_r y) + \frac{1}{K(\beta_r y)} \right\}^r dy \\ = \left\{ H_r + \frac{1}{H_r} \right\}^r, \quad (A 5)$$

wobei

$$(H_r)^\mu = (H_r)^{-\mu} = H_r^\mu \\ = 2^{-r} \int_0^\infty y^{r+1} J_0(y \chi/\chi_0) K_\mu(\beta_r y) dy.$$

Nach Anm. <sup>11</sup> (S. 137) wird dann

$$H_r^\mu = \frac{1}{\beta_r^{r+2}} \left( \frac{r+\mu}{2} \right)! \left( \frac{r-\mu}{2} \right)! F \left\{ \frac{r-\mu}{2} + 1; \frac{r+\mu}{2} + 1; 1; - \left( \frac{\chi}{\beta_r \chi_0} \right)^2 \right\} \quad (A 6)$$

mit der GAUSSSchen Hypergeometrischen Funktion  $F(a; b; c; z)$ . Da nun bei den vorkommenden Kombinationen  $(\mu, r)$  entweder beide gerade oder beide ungerade sind, so ist  $(r+\mu)/2$  und  $(r-\mu)/2$  immer ganz. Für ganze  $\chi, \lambda$  gilt aber

$$F[z+1; \lambda+1; 1; (-z)] \\ = \frac{(-1)^\lambda}{z! \lambda!} \left( \frac{d}{dz} \right)^z z^z \left( \frac{d}{dz} \right)^\lambda \frac{1}{1+z}, \quad (A 7)$$

d. h. es wird

$$H_r^\mu = \frac{1}{\beta_r^{r+2}} \left( \frac{d}{dz_r} \right)^{\frac{r-\mu}{2}} z_r^{\frac{r-\mu}{2}} \left( \frac{d}{dz_r} \right)^{\frac{r+\mu}{2}} \frac{1}{1+z_r} (-1)^{\frac{r+\mu}{2}}. \quad (A 8)$$

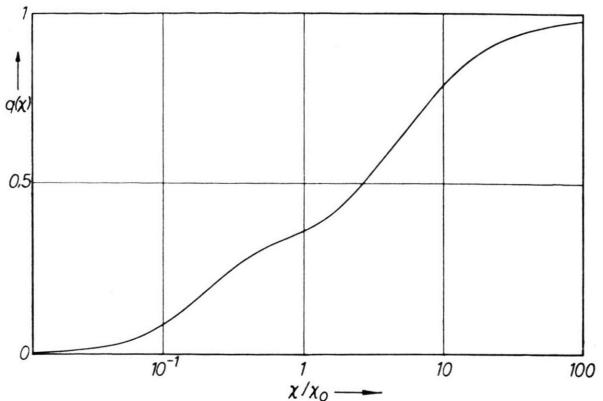


Abb. 4. Abschirmfunktion von Be bei  $\alpha \rightarrow 0$ .

Setzt man dies in (A 5) ein, so ergibt sich für  $\nu = 0, 2, 4$ :

$$P_0 = \frac{1}{\alpha_0^2} (1+z_0)^{-1}, \\ P_2 = \frac{2}{\alpha_2^4} (3-z_2) (1+z_2)^{-3}, \\ P_4 = (24/\alpha_4^2) (5-10z_4+z_4^2) (1+z_4)^{-5}, \quad (A 9)$$

woraus bei Benutzung der Koeffizienten aus (5) folgt

$$P = \sum \varrho_r P_r \\ = \frac{1}{\alpha_0^2} (1+z_0)^{-1} + 1,07 (3-z_2) (1+z_2)^{-3} \\ + 0,141 (5-10z_4+z_4^2) (1+z_4)^{-5}. \quad (A 10)$$

Das daraus sich nach (A 1) ergebende  $q(\chi)$  zeigt Abb. 4.

## Vielfachstreuung von 8 MeV- $\alpha$ -Teilchen am Blei

Von HANS FLEISCHMANN

Aus dem Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München  
(Z. Naturforsch. 15 a, 1096–1100 [1960]; eingegangen am 8. September 1960)

Streuexperimente von  $\alpha$ -Strahlen des ThC und ThC' an einer Bleifolie von  $10,93 \text{ mg/cm}^2$  zeigten Übereinstimmung mit der MOLIÈRESchen Theorie innerhalb einer Meßgenauigkeit von 2,5% für den MOLIÈRESchen Parameter  $B$ , d. h. ca. 7% für den Abschirmwinkel  $\chi_a$ . Bei einer mittleren Stoßzahl  $\Omega = 29$ , entsprechend  $2,6 \text{ mg/cm}^2$  Blei, ergab sich ein um  $7 \pm 3\%$  vergrößerter Wert für  $B$ , was gut mit der auf Grund der Näherungsannahmen über den Einzelquerschnitt zu erwartenden Abweichung übereinstimmt <sup>1</sup>.

Nach der in der voranstehenden Arbeit <sup>1</sup> durchgeföhrten Analyse der MOLIÈRESchen Kleinwinkel-Theorie kann diese zusammen mit Messungen der Vielfach-Streuungen von Partikeln an genügend dicken Folien ( $\Omega \gtrsim 100$ ) zur Bestimmung des Ab-

schirmwinkels  $\chi_a$  benützt werden. Bei dünnen Folien dagegen hat man eine scheinbare Verbreiterung der Streuverteilung zu erwarten, deren Größe ein Maß für die Steilheit der Abschirmfunktion  $q(\chi)$  im Übergangsgebiet  $\chi \approx \chi_a$  ist. Sie sollte besonders

<sup>1</sup> H. FLEISCHMANN, Z. Naturforsch. 15 a, 1090 [1960], voranstehend.